有限葉非有界被覆面の倉持境界(ポテンシャル論とその関連分野)

神, 直人; 正岡, 弘照; 瀬川, 重男

数理解析研究所講究録
1016 巻 1997 年 166-171

有限葉非有界被覆面の倉持境界

学習院大·理　神　直人　(Naondo Jin)
京都産大·理　正岡弘照　(Hiroaki Masaoka)
大同工大　瀬川重男　(Shigeo Segawa)

1. Notation

R : 開 Riemann 面,

$\widetilde{R}$: R の m 葉非有界被覆面 $(1 < m < \infty)$,

π : $\widetilde{R}$ から R への射影,

R^*, $\widetilde{R}^*$: R, $\widetilde{R}$ の倉持コンパクト化,

Δ, $\widetilde{\Delta}$: R, $\widetilde{R}$ の倉持 (理想) 境界,

Δ_1, $\widetilde{\Delta}_1$: R^*, $\widetilde{R}^*$ の minimal 境界点全体.

K_0 : R の閉円板,

$R_0 = R \setminus K_0$,

$\widetilde{K}_0 = \pi^{-1}(K_0)$,

$\widetilde{R}_0 = \widetilde{R} \setminus \widetilde{K}_0$.

N_p, $\widetilde{\mathrm{N}}_{\widetilde{p}}$: R_0, $\widetilde{R}_0$ 上の倉持核函数.

[MS1], [MS2] では R の Martin 境界点の上にある $\widetilde{R}$ の Martin minimal 境界点の個数についての評価が，minimal fine neighborhood を用いてなされている.

本講演の目的は，倉持コンパクト化の場合において $p \in \Delta$ の上にある $\widetilde{\Delta}_1$ の点の個数を極小細近傍を用いて評価することにある．以下で，R, $\widetilde{R}$ の倉持コンパクト化を議論するが倉持コンパクト化の理論の詳細については [CC] を参照する.

2. Full-superharmonic function

定義 1. ([CC, p.159]) R_0 上の非負値優調和関数 s が **full-superharmonic** であるとは，∂G がコンパクトで $\partial G \cap K_0 = \emptyset$ をみたす R_0 上の任意の領域 G と $\forall p \in G$ について

$$s(p) \geq \int s(q) d\omega_p^G(q)$$

が成り立つことである．但し，ω_p^G は G と p に関する full-harmonic measure である.

以下，R_0，$\widetilde{R}_0$ 上の full-superharmonic functions 全体をそれぞれ $FS(R_0)$，$FS(\widetilde{R}_0)$ と記す.

Fact ([CC, Satz 16.2]): $s \in FS(R_0)$ かつ，∂K_0 上 $s = 0$ をみたすとき，$R_0 \cup \Delta_1$ 上の測度 (= 標準測度) μ が一意的に存在して,

$$s(p) = \int \mathrm{N}_q(p) d\mu(q)$$

とポテンシャル表示される.

$\widetilde{R}$ 上の実数値函数 $\widetilde{f}$ に対して R 上の函数 $\psi[\widetilde{f}], \varphi[\widetilde{f}]$ を次の様に定める．

$$\psi[\widetilde{f}](p) = \min\{\widetilde{f}(\widetilde{p}); \widetilde{p} \in \pi^{-1}(p)\},$$

$$\varphi[\widetilde{f}](p) = \sum_{\widetilde{p} \in \pi^{-1}(p)} m(\widetilde{p})\widetilde{f}(\widetilde{p})$$

ここで，$m(\widetilde{p})$ は π の $\widetilde{p}$ における multiplicity である．

$FS(R_0)$ と $FS(\widetilde{R}_0)$ との関係は次のとおり．

補題 1. *1)* $\widetilde{s} \in FS(\widetilde{R}_0)$ ならば，$\psi[\widetilde{s}] \in FS(R_0)$ かつ $\varphi[\widetilde{s}] \in FS(R_0)$.
2) $s \in FS(R_0)$ ならば，$s \circ \pi \in FS(\widetilde{R}_0)$.

倉持核函数については次のことが分かる．

命題 1. *1)* $\widetilde{p} \in \widetilde{R}_0$ ならば $\varphi[\widetilde{N}_{\widetilde{p}}] = N_{\pi(\widetilde{p})}$ が成立する．
2) π は $\widetilde{\Delta}$ まで連続に拡張され，$\pi(\widetilde{\Delta}) = \Delta$ が成立する．
3) $\widetilde{p} \in \widetilde{\Delta}$ に対しても $\varphi[\widetilde{N}_{\widetilde{p}}] = N_{\pi(\widetilde{p})}$ が成立する．

定義 2. $s(p) \in FS(R_0)$，E を R_0 上の閉集合とする．このとき，$s(p)$ の E に関する **掃散** (balayage) を，

$$s_E(p) = \inf\{u(p); u(p) \in \mathcal{S}_E^s\}$$

と定義する。但し，

$$\mathcal{S}_E^s = \{u \in FS(R_0) : E \text{ 上 quasi everywhere に } u \geq s\}.$$

このとき，$s_E \in FS(R_0)$ がわかり，次のことが成り立つ．

補題 2. $s(p) \in FS(R_0)$，E を R_0 上の閉集合とする．このとき，

$$s_E \circ \pi = (s \circ \pi)_{\pi^{-1}(E)}.$$

3．有限葉非有界被覆面の倉持境界点

各 $p \in \Delta$ に対して，$\widetilde{\Delta}_1(p) = \pi^{-1}(p) \cap \widetilde{\Delta}_1$ とおき，$\widetilde{\Delta}_1(p)$ の濃度 (個数) を $\sharp\widetilde{\Delta}_1(p)$ と書くことにする．また，$Cl(A)$ で集合 A の倉持コンパクト化での閉包を表す．

命題 2. *1)* $p \in \Delta \setminus \Delta_1$ ならば $\sharp\widetilde{\Delta}_1(p) = 0$.
2) $p \in \Delta_1$ ならば $1 \leq \sharp\widetilde{\Delta}_1(p) \leq m$.

証明. $d(p,q)$ を $R_0 \cup \Delta$ 上の倉持距離 ([CC,Satz 12.1] 参照) とし，$p \in \Delta, k \in \mathbb{N}$ に対して

$$A_k = \{q \in R_0; d(p,q) \leq \frac{1}{k}\}, \quad \widetilde{A}_k = \pi^{-1}(A_k)$$

とおく．補題 2 より

$$(\mathrm{N}_p \circ \pi)_{\widetilde{A}_k} = (\mathrm{N}_p)_{A_k} \circ \pi \quad \cdots (1)$$

がわかる．

1) $p \in \Delta \setminus \Delta_1$ ならば [CC, Hilfssatz 17.6] より $k \to \infty$ のとき

$$(\mathrm{N}_p)_{A_k} \to 0.$$

$\widetilde{p} \in \widetilde{\Delta}_1(p)$ とすると命題 1 より $\widetilde{\mathrm{N}}_{\widetilde{p}} \leq \mathrm{N}_p \circ \pi$. ゆえに，(1) から

$$(\widetilde{\mathrm{N}}_{\widetilde{p}})_{\widetilde{A}_k} \to 0.$$

しかしこれは，$Cl(\widetilde{A}_k)$ が $\widetilde{p}$ の近傍になることに反する．

2) $p \in \Delta_1$ ならば [CC, Satz 17.13 and Folgesatz 17.10] より

$$(\mathrm{N}_p)_{A_k} = \mathrm{N}_p.$$

$\mathrm{N}_p \circ \pi$ の 標準表示 を $\int \widetilde{\mathrm{N}}_{\widetilde{p}} d\widetilde{\mu}(\widetilde{p})$ とする．$(\mathrm{N}_p \circ \pi)_{\widetilde{A}_k}$ は $Cl(\widetilde{A}_k)$ に台を持つ 標準測度 $\widetilde{\nu}_k$ を用いて $\int \widetilde{\mathrm{N}}_{\widetilde{p}} d\widetilde{\nu}_k(\widetilde{p})$ と表される．(1) と標準表示の一意性より，$\widetilde{\mu} = \widetilde{\nu}_k$. つまり，

$$\operatorname{supp} \widetilde{\mu} \subset \cap_{k=1}^{\infty} Cl(\widetilde{A}_k) = \pi^{-1}(p).$$

ゆえに，$1 \leq \sharp \widetilde{\Delta}_1(p)$.

さて，$\widetilde{p} \in \widetilde{\Delta}_1(p)$ とすると，命題 1 により，次の条件 i)-iii) を満たす点列 $\{\widetilde{q}_k\} \subset \widetilde{R}_0$ が存在する:

i) $\widetilde{q}_k \to \widetilde{p}$; ii) $q_k \to p$ $(q_k = \pi(\widetilde{q}_k))$; iii) 各 q_k の位数は $m-1$ である．

$\pi^{-1}(q_k) = \{\widetilde{q}_k = \widetilde{q}_k^{(1)}, \cdots, \widetilde{q}_k^{(m)}\}$ とすると，各 j, $(1 \leq j \leq m)$, について $\{\widetilde{q}_k^{(j)}\}_k$ は $\widetilde{p}_j \in \widetilde{\Delta}$ に収束するとしてよい．命題 1 より，$\widetilde{q} \in \widetilde{R}_0$ ならば

$$\sum_{j=1}^{m} \widetilde{\mathrm{N}}_{\widetilde{q}}(\widetilde{q}_k^{(j)}) = \varphi[\widetilde{\mathrm{N}}_{\widetilde{q}}](q_k) = \mathrm{N}_{\pi(\widetilde{q})}(q_k).$$

$k \to \infty$ とすると

$$\sum_{j=1}^{m} \widetilde{\mathrm{N}}_{\widetilde{q}}(\widetilde{p}_j) = \mathrm{N}_{\pi(\widetilde{q})}(p).$$

がわかる．ゆえに，

$$\sum_{j=1}^{m} \widetilde{\mathrm{N}}_{\widetilde{p}_j} = \mathrm{N}_p \circ \pi.$$

$\widetilde{\mathrm{N}}_{\widetilde{p}_j} = \int \widetilde{\mathrm{N}}_{\widetilde{q}} d\widetilde{\mu}_j(\widetilde{q})$, $\mathrm{N}_p \circ \pi = \int \widetilde{\mathrm{N}}_{\widetilde{q}} d\widetilde{\mu}(\widetilde{q})$ と標準表示されているとすると，一意性より $\widetilde{\mu} = \sum_{j=1}^{m} \widetilde{\mu}_j$. 特に，$\widetilde{\mu}_1 = \delta_{\widetilde{p}}$ であるから $\widetilde{\mu}(\{\widetilde{p}\}) \geq 1$. そこで，$\widetilde{\Delta}_1(p)$ の任意の有限部分集合を $\{\widetilde{p}_1, \cdots, \widetilde{p}_\kappa\}$ とすると，上のことより，

$$\mathrm{N}_p \circ \pi \geq \sum_{j=1}^{\kappa} \widetilde{\mathrm{N}}_{\widetilde{p}_j}.$$

よって,

$$\varphi[\mathrm{N}_p \circ \pi] \geq \varphi[\sum_{j=1}^{\kappa} \widetilde{\mathrm{N}}_{\widetilde{p}_j}].$$

命題 1　から,

$$m\mathrm{N}_p \geq \kappa \mathrm{N}_p.$$

つまり $\kappa \leq m$, よって $\sharp\widetilde{\Delta}_1(p) \leq m$ を得る．　□

系. $p \in \Delta_1$ とし $\widetilde{\Delta}_1(p) = \{\widetilde{p}_1, \cdots, \widetilde{p}_\kappa\}$, $(\kappa \leq m)$, とおく．このとき，次のような正定数 $c_1, \cdots, c_\kappa$ $(c_j \geq 1, 1 \leq j \leq \kappa)$ が存在する:

$$N_p \circ \pi = \sum_{j=1}^{\kappa} c_j \widetilde{\mathrm{N}}_{\widetilde{p}_j}.$$

4．主結果

定義 3. $p \in \Delta_1$ とする．R_0 の閉部分集合 E が p で **N-thin** であるとは，$(\mathrm{N}_p)_E \neq \mathrm{N}_p$ が成り立つことである．

また，R_0 の部分領域 M に対し $M \cup \{p\}$ が p の**極小細近傍**であるとは，$R_0 \setminus M$ が p で N-thin となることである．

補題 3. $p \in \Delta_1$ とする．E が p で *N-thin* であるための必要十分条件は,

$$\lim_{k \to \infty} (N_p)_{A_k \cap E} = 0$$

である．但し $A_k = \{q \in R_0; d(p,q) \leq \frac{1}{k}\}$.

次の命題は主定理を証明するための核である．この命題は $R = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ の場合は [Ma] において証明された．

命題 3. $p \in \Delta_1$ とし，$\widetilde{E}$ は $\widetilde{R}_0$ の閉部分集合とする．このとき，$\widetilde{E}$ が$\widetilde{\Delta}_1(p)$ の各点で *N-thin* であるための必要十分条件は $E = \pi(\widetilde{E})$ が p で *N-thin* となることである．

証明. $\widetilde{\Delta}_1(p) = \{\widetilde{p}_1, \cdots, \widetilde{p}_\kappa\}$, $\kappa \leq m$, とする．

$\widetilde{E}$ が各 $\widetilde{p}_j$ で N-thin であるとする．$\widetilde{B}_k = \widetilde{A}_k \cap \widetilde{E}$ とおく．補題 3 と [CC, Hilfssatz 17.6] を用いて,

$$\lim_{k \to \infty} (\widetilde{\mathrm{N}}_{\widetilde{p}_j})_{\widetilde{B}_k} = 0$$

が示される．系より

$$(\mathrm{N}_p \circ \pi)_{\widetilde{B}_k} = \sum_{j=1}^{\kappa} c_j (\widetilde{\mathrm{N}}_{\widetilde{p}_j})_{\widetilde{B}_k} \to 0.$$

掃散の定義により

$$(\mathrm{N}_p)_{E \cap A_k} \leq \varphi[(\mathrm{N}_p \circ \pi)_{\widetilde{B}_k}],$$

であるから $(\mathrm{N}_p)_{E\cap A_k} \to 0$. よって E は p で N-thin となる.
逆に, E が p で N-thin とする. [CC, Satz 17.19] により

$$s(p) < \infty \text{ かつ } \lim_{E\ni q\to p} s(q) = \infty$$

を満たす R_0 上の倉持ポテンシャル s がある. $\widetilde{s} = s\circ\pi$ とすると,

$$\widetilde{s}(\widetilde{p}_j) < \infty \text{ かつ } \lim_{\pi^{-1}(E)\ni\widetilde{q}\to\widetilde{p}_j} \widetilde{s}(\widetilde{q}) = \infty.$$

ゆえに, $\pi^{-1}(E)$ は各 $\widetilde{p}_j$ で N-thin , よって $\widetilde{E}$ は各 $\widetilde{p}_j$ で N-thin となる. □

$p\in\Delta_1$ に対して R_0 の部分領域 M で $M\cup\{p\}$ が p の極小細近傍となるもの全体を $\mathcal{M}_p$, 更に, $M\in\mathcal{M}_p$ に対して $\pi^{-1}(M)$ の連結成分の個数を $n(M)$ で表す.

主定理. $p\in\Delta_1$ とする. このとき,

$$\sharp\widetilde{\Delta}_1(p) = \max_{M\in\mathcal{M}_p} n(M)$$

が成立する.

証明. $\sharp\widetilde{\Delta}_1(p) = \kappa$ とし

$$\widetilde{\Delta}_1(p) = \{\widetilde{p}_1,\cdots,\widetilde{p}_\kappa\},\quad \widetilde{A}_k(\widetilde{p}_j) = \{\widetilde{q}\in\widetilde{R}_0; d(\widetilde{q},\widetilde{p}_j) < 1/k\},\quad k\geq 1,$$

とおく. $\{\widetilde{A}_k(\widetilde{p}_j)\}_{j=1}^{\kappa}$ は互いに disjoint としてよい.
$\widetilde{E}_k(\widetilde{p}_j) = \widetilde{R}_0\setminus\widetilde{A}_k(\widetilde{p}_j)$ は $\widetilde{p}_j$ で N-thin だから $\widetilde{\mathrm{N}}_{\widetilde{p}_j} > (\widetilde{\mathrm{N}}_{\widetilde{p}_j})_{\widetilde{E}_k(\widetilde{p}_j)}$. [CC, Satz 17.20] より $\widetilde{A}_k(\widetilde{p}_j)$ の連結成分 $\widetilde{D}_k(\widetilde{p}_j)$ で $\widetilde{D}_k(\widetilde{p}_j)$ 上 $\widetilde{\mathrm{N}}_{\widetilde{p}_j} > (\widetilde{\mathrm{N}}_{\widetilde{p}_j})_{\widetilde{E}_k(\widetilde{p}_j)}$ となるものがただ一つ存在する. $\widetilde{D}_k(\widetilde{p}_j)\cup\{\widetilde{p}_j\}$ は $\widetilde{p}_j$ の極小細近傍になり $\widetilde{F} = \cap_{j=1}^{\kappa}(\widetilde{R}\setminus\widetilde{D}_k(\widetilde{p}_j))$ は各 $\widetilde{p}_j$ で N-thin である. 命題 3 から, $\pi(\widetilde{F})$ は p で N-thin である. [CC, Satz 17.20] から $R_0\setminus\pi(\widetilde{F})$ の連結成分 M で $M\in\mathcal{M}_p$ となるものがただ一つ存在する. 命題 3 から $\pi^{-1}(R\setminus M)$ は各 $\widetilde{p}_j$ で N-thin である. $\pi^{-1}(M)\cup\{\widetilde{p}_j\}$ は $\widetilde{p}_j$ の極小細近傍であるから, [CC, Satz 17.20] により $\pi^{-1}(M)$ の連結成分 $\widetilde{M}_j$ で $\widetilde{M}_j\cup\{\widetilde{p}_j\}$ が $\widetilde{p}_j$ の極小細近傍となるものがただ一つ存在する. $\widetilde{D}_k(\widetilde{p}_j)\cap\widetilde{M}_j\neq\emptyset$ から $\widetilde{M}_j\subset\widetilde{D}_k(\widetilde{p}_j)$ が従う. ゆえに $\kappa\leq n(M)$. よって, $\kappa\leq\max_{M\in\mathcal{M}_p} n(M)$ がわかる.

次に, M を $\mathcal{M}_p$ の任意の元とし, $\pi^{-1}(M) = \cup_{i=1}^{n(M)}\widetilde{M}_i$ とする. 上で見たように各 $\widetilde{p}_j$ に対して $\widetilde{M}_i\cup\{\widetilde{p}_j\}$ が $\widetilde{p}_j$ の極小細近傍となるものがただ一つ存在する.

$\widetilde{M}_l$ でどの $\widetilde{p}_j$ に対しても $\widetilde{M}_l\cup\{\widetilde{p}_j\}$ が $\widetilde{p}_j$ の極小細近傍にならないものがあったとする. $\widetilde{F} = \widetilde{R}\setminus(\cup_{i\neq l}\widetilde{M}_i)$ は 各 $\widetilde{p}_j$ で N-thin より 命題 3 から $\pi(\widetilde{F})$ は p で N-thin. しかし, $\pi(\widetilde{F})\supset\pi(\widetilde{M}_l\cup\partial\widetilde{M}_l) = \overline{M}$ であり, $M\in\mathcal{M}_p$ に矛盾する. ゆえに $\kappa\geq n(M)$, つまり $\kappa\geq\max_{M\in\mathcal{M}_p} n(M)$ である. □

References

[CC] Constantinescu C. and Cornea A., *Ideal Ränder Riemannscher Flächen*, Springer, Berlin, 1963.

[Ma] Masaoka, H., *Criterion of a Wiener type for minimal thinness on covering surfaces*, Proc. Japan Acad. Ser. A **72** (1996), 154–156.

[MS1] Masaoka, H. and S. Segawa, *Harmonic dimension of covering surfaces and minimal fine neighborhood*, to appear in Osaka J. Math.

[MS2] Masaoka, H. and S. Segawa, *Martin boundary of unlimited covering surfaces*, in preparation.